刚体相对于一般动参考系的定轴转动微分方程

张劲夫

(西北工业大学工程力学系,710129 西安)

摘　要:为了便于研究刚体相对于动参考系的定轴转动的动力学问题,本研究从质点系对任意点的动量矩定理出发,推导出了刚体相对于一般动参考系的定轴转动微分方程。最后,将该方程应用于3个具体实例,验证了该方程的正确性和应用上的便捷性,以此说明了该方程具有一定的应用推广价值。

关键词:刚体;动参考系;定轴转动;动力学;微分方程

中图分类号:O343　　**文献标志码:**A

The differential equation of rigid body rotation about a fixed axis relative to a general moving reference frame

ZHANG Jinfu

(Department of Engineering Mechanics, Northwestern Polytechnical University, 710129 Xi'an, China)

Abstract: In order to facilitate the study on the dynamics of rigid body rotation about a fixed axis relative to a moving reference frame, the differential equation of rigid body rotation about a fixed axis relative to a general moving reference frame is derived by using the theorem of angular momentum of a system of particles about an arbitrary point. This equation is applied to three concrete examples to verify the correctness of the equation and the convenience of its application, which shows that the equation has certain application value.

Key words: rigid body; moving reference frame; rotation about a fixed axis; dynamics; differential equation

通常,“刚体定轴转动微分方程”是指刚体相对于固定参考系(或惯性参考系)的定轴转动微分方程。这一方程几乎在国内外各种版本的理论力学、工程力学和动力学教科书(如文献[1-10]等)中都有过专门介绍,也被一些学者[11-14]用来研究不同特征的刚体相对于固定参考系(或惯性参考系)定轴转动的动力学特性。然而“刚体定轴转动微分方程”一般不适用于研究刚体相对于动参考系的定轴转动问题,特别是不适用于研究刚体相对于非惯性参考系的定轴转动问题(因为建立此方程所基于的参考系仅仅是固定参考系或惯性参考系[1-10])。考虑到工程实际中许多构件的运动(如安装于移动载体上的电机转子的运动、航空发动机上的叶轮转子的运动、飞机上的螺旋桨的运动、舰船上的汽轮机转子的运动等)都可以看作是刚体相对于动参考系的定轴转动,因此,建立刚体相对于动参考系的定轴转动微分方程无疑具有重要的理论和实际意义。基于这一原因,本研究推导了刚体相对于一般动参考系

收稿日期:2021-03-10　　**修回日期:**2022-03-14

通信作者:张劲夫,教授。E-mail:jfzhang@nwpu.edu.cn

引用格式:张劲夫. 刚体相对于一般动参考系的定轴转动微分方程[J]. 应用力学学报,2022,39(3):583-587.

ZHANG Jinfu. The differential equation of rigid body rotation about a fixed axis relative to a general moving reference frame[J]. Chinese journal of applied mechanics,2022,39(3):583-587.

的定轴转动微分方程,该方程的获得为方便地研究各种相对于动参考系作定轴转动的刚体动力学问题创造了非常便利的条件。

1 刚体相对于一般动参考系的定轴转动微分方程的推导

如图 1 所示,某刚体相对于动参考系 $Ox_1y_1z_1$ 绕 z_1 轴转动,而动参考系 $Ox_1y_1z_1$ 相对于定参考系(或惯性参考系)$O_0x_0y_0z_0$ 作空间一般运动。

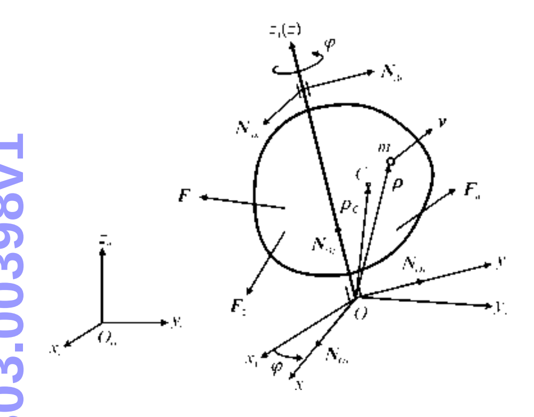


图 1 刚体相对于动参考系的定轴转动

Fig. 1 Rigid body rotation about a fixed axis relative to a moving reference frame

下面推导该刚体相对于动参考系 $Ox_1y_1z_1$ 的定轴转动微分方程(即推导该刚体相对于一般动参考系的定轴转动微分方程)。为了便于推导,建立刚体的连体坐标系 $Oxyz$,其中 z 轴与 z_1 轴重合。将质点系对任意点的动量矩定理[1]应用于该刚体,有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}^{(e)}) - \boldsymbol{v}_O \times M\boldsymbol{v}_C \qquad (1)$$

式中:$\boldsymbol{L}_O$ 为刚体在绝对运动中对点 O 动量矩(即刚体相对于定系 $O_0x_0y_0z_0$ 的运动中对点 O 的动量矩);$\boldsymbol{F}^{(e)}$ 为作用于刚体上的任一外力;$\boldsymbol{v}_O$ 为点 O 的绝对速度;M 为刚体的质量;$\boldsymbol{v}_C$ 为刚体质心 C 的绝对速度。

考虑到矢量的绝对导数与相对导数之间的关系[15]后,式(1)还可以写为

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L}_O = \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}^{(e)}) - \boldsymbol{v}_O \times M\boldsymbol{v}_C \qquad (2)$$

式中:$\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{L}_O/\mathrm{d}t$ 为矢量$\boldsymbol{L}_O$ 在刚体的连体坐标系 $Oxyz$ 中对时间的导数(相对导数);$\boldsymbol{\omega}$ 为连体坐标系 $Oxyz$ 相对定参考系 $O_0x_0y_0z_0$ 的角速度(即刚体的绝对角速度)。

为了推导出刚体相对于动参考系 $Ox_1y_1z_1$ 的定轴转动微分方程,需将矢量式(2)沿 z 轴进行投影。为此,用沿 z 轴正向的单位矢 $\boldsymbol{k}$ 点乘矢量式(2)的两端,即有

$$\boldsymbol{k}\cdot\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{L}_O) = \sum[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}^{(e)})] - \boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{v}_O\times M\boldsymbol{v}_C) \qquad (3)$$

用符号 L_x、L_y 和 L_z 分别表示矢量$\boldsymbol{L}_O$ 在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影,则$\boldsymbol{L}_O$ 可以表达为

$$\boldsymbol{L}_O = L_x\boldsymbol{i} + L_y\boldsymbol{j} + L_z\boldsymbol{k} \qquad (4)$$

式中,$\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 分别为沿 x 轴和 y 轴正向的单位矢。将式(4)对时间求相对导数,得

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}L_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}L_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} \qquad (5)$$

根据力对点之矩与力对轴之矩的关系[1],式(3)右端的第一项 $\sum[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}^{(e)})]$ 可以表达为

$$\sum[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}^{(e)})] = \sum M_z(\boldsymbol{F}^{(e)}) \qquad (6)$$

式中,$M_z(\boldsymbol{F}^{(e)})$为外力$\boldsymbol{F}^{(e)}$对 z 轴之矩。根据刚体上任意两点的速度之间的关系式[15],可以将刚体质心 C 的绝对速度表达为

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_C \qquad (7)$$

式中,$\boldsymbol{\rho}_C$ 为点 C 相对点 O 的矢径(图 1)。将式(5)~式(7)代入式(3)得

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{L}_O) = \sum M_z(\boldsymbol{F}^{(e)}) - M\boldsymbol{k}\cdot[\boldsymbol{v}_O\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_C)] \qquad (8)$$

根据质点系对点的动量矩的定义[1],可以将刚体在绝对运动中对点 O 动量矩表达为

$$\boldsymbol{L}_O = \sum(\boldsymbol{\rho}\times m\boldsymbol{v}) \qquad (9)$$

式中:m 为组成刚体的任一质点的质量;$\boldsymbol{\rho}$ 为该质点相对点 O 的矢径(图 1);$\boldsymbol{v}$ 为该质点的绝对速度,类似于式(7),可表达为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho} \qquad (10)$$

将上式代入式(9)后,得到

$$\boldsymbol{L}_O = M\boldsymbol{\rho}_C\times\boldsymbol{v}_O + \sum[m\boldsymbol{\rho}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})] \qquad (11)$$

用符号 v_{x_1}、v_{y_1}和 v_{z_1}分别表示矢量$\boldsymbol{v}_O$ 在 x_1 轴、y_1 轴和 z_1 轴上的投影,则有

$$\boldsymbol{v}_O = v_{x_1}\boldsymbol{i}_1 + v_{y_1}\boldsymbol{j}_1 + v_{z_1}\boldsymbol{k}_1 \qquad (12)$$

式中:$\boldsymbol{i}_1$、$\boldsymbol{j}_1$ 和$\boldsymbol{k}_1$ 分别为沿 x_1 轴、y_1 轴和 z_1 轴正向的

单位矢。同理，将动参考系 $Ox_1y_1z_1$ 相对定参考系 $O_0x_0y_0z_0$ 的角速度 $\boldsymbol{\omega}_1$ 表达为

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \omega_{x_1}\boldsymbol{i}_1 + \omega_{y_1}\boldsymbol{j}_1 + \omega_{z_1}\boldsymbol{k}_1 \tag{13}$$

式中：ω_{x_1}、ω_{y_1} 和 ω_{z_1} 分别为矢量 $\boldsymbol{\omega}_1$ 在 x_1 轴、y_1 轴和 z_1 轴上的投影。显然动参考系 $Ox_1y_1z_1$ 的速度状态可以用式(12)和式(13)联合描述。

根据角速度合成定理[15]，可以将刚体的绝对角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 表达为

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \dot{\varphi}\boldsymbol{k} = \omega_{x_1}\boldsymbol{i}_1 + \omega_{y_1}\boldsymbol{j}_1 + \omega_{z_1}\boldsymbol{k}_1 + \dot{\varphi}\boldsymbol{k} \tag{14}$$

式中：φ 为刚体相对动参考系 $Ox_1y_1z_1$ 作定轴转动的角坐标。如图 1 所示，坐标系 $Ox_1y_1z_1$ 的坐标轴单位矢与刚体的连体坐标系 $Oxyz$ 的坐标轴单位矢之间满足如下关系。

$$\boldsymbol{i}_1 = \boldsymbol{i}\cos\varphi - \boldsymbol{j}\sin\varphi \tag{15}$$

$$\boldsymbol{j}_1 = \boldsymbol{i}\sin\varphi + \boldsymbol{j}\cos\varphi \tag{16}$$

$$\boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{k} \tag{17}$$

将以上 3 式代入式(12)和式(14)得

$$\boldsymbol{v}_O = (v_{x_1}\cos\varphi + v_{y_1}\sin\varphi)\boldsymbol{i} + (v_{y_1}\cos\varphi - v_{x_1}\sin\varphi)\boldsymbol{j} + v_{z_1}\boldsymbol{k} \tag{18}$$

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_{x_1}\cos\varphi + \omega_{y_1}\sin\varphi)\boldsymbol{i} + (\omega_{y_1}\cos\varphi - \omega_{x_1}\sin\varphi)\boldsymbol{j} + (\omega_{z_1} + \dot{\varphi})\boldsymbol{k} \tag{19}$$

如图 1 所示，设刚体上任一质点 m 在刚体的连体坐标系 $Oxyz$ 中的直角坐标为 (x, y, z)，刚体的质心 C 在连体坐标系 $Oxyz$ 中的直角坐标系为 (x_C, y_C, z_C)，于是矢量 $\boldsymbol{\rho}$ 和 $\boldsymbol{\rho}_C$ 可以分别表达为

$$\boldsymbol{\rho} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{20}$$

$$\boldsymbol{\rho}_C = x_C\boldsymbol{i} + y_C\boldsymbol{j} + z_C\boldsymbol{k} \tag{21}$$

将式(18)~式(21)代入式(11)后，化简得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_O = {} & [My_Cv_{z_1} - (Mz_Cv_{y_1} - J_{xx}\omega_{x_1} + J_{xy}\omega_{y_1})\cos\varphi + (Mz_Cv_{x_1} + J_{xx}\omega_{y_1} + J_{xy}\omega_{x_1})\sin\varphi - J_{zx}(\omega_{z_1} + \dot{\varphi})]\boldsymbol{i} - \\ & [Mx_Cv_{z_1} - (Mz_Cv_{x_1} - J_{xy}\omega_{x_1} + J_{yy}\omega_{y_1})\cos\varphi - (Mz_Cv_{y_1} - J_{xy}\omega_{y_1} - J_{yy}\omega_{x_1})\sin\varphi + J_{yz}(\omega_{z_1} + \dot{\varphi})]\boldsymbol{j} + \{[M(x_Cv_{y_1} - y_Cv_{x_1}) - J_{zx}\omega_{x_1} - J_{yz}\omega_{y_1}]\cos\varphi - [M(x_Cv_{x_1} + y_Cv_{y_1}) + \\ & J_{zx}\omega_{y_1} - J_{yz}\omega_{x_1}]\sin\varphi + J_{zz}(\omega_{z_1} + \dot{\varphi})\}\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{22}$$

式中：$J_{xx} = \sum m(y^2 + z^2)$，$J_{yy} = \sum m(x^2 + z^2)$，$J_{zz} = \sum m(x^2 + y^2)$ 分别为刚体对连体轴 x、y、z 的转动惯量；$J_{xy} = \sum mxy$，$J_{yz} = \sum myz$，$J_{zx} = \sum mzx$ 分别为刚体对轴 x 与轴 y、轴 y 与轴 z、轴 z 与轴 x 的惯量积。

由式(22)可以看出，矢量 $\boldsymbol{L}_O$ 在 z 轴上投影的表达式为

$$L_z = [M(x_Cv_{y_1} - y_Cv_{x_1}) - J_{zx}\omega_{x_1} - J_{yz}\omega_{y_1}]\cos\varphi - [M(x_Cv_{x_1} + y_Cv_{y_1}) + J_{zx}\omega_{y_1} - J_{yz}\omega_{x_1}]\sin\varphi + J_{zz}(\omega_{z_1} + \dot{\varphi}) \tag{23}$$

最后将式(18)、式(19)、式(21)~式(23)代入式(8)，化简后得到

$$J_{zz}\ddot{\varphi} = \sum M_z(\boldsymbol{F}^{(e)}) + \Delta \tag{24a}$$

其中

$$\begin{aligned}\Delta = {} & [(J_{xx} - J_{yy})\omega_{x_1}\omega_{y_1} + J_{xy}(\omega_{x_1}^2 - \omega_{y_1}^2)]\cos(2\varphi) - \frac{1}{2}[(J_{xx} - J_{yy})(\omega_{x_1}^2 - \omega_{y_1}^2) - 4J_{xy}\omega_{x_1}\omega_{y_1}]\sin(2\varphi) - \\ & \{M[x_C\dot{v}_{y_1} - y_C\dot{v}_{x_1} + \omega_{z_1}(x_Cv_{x_1} + y_Cv_{y_1}) - v_{z_1}(x_C\omega_{x_1} + y_C\omega_{y_1})] - J_{zx}\dot{\omega}_{x_1} - J_{yz}\dot{\omega}_{y_1} + \omega_{z_1}(J_{zx}\omega_{y_1} - J_{yz}\omega_{x_1})\}\cos\varphi + \\ & \{M[x_C\dot{v}_{x_1} + y_C\dot{v}_{y_1} - \omega_{z_1}(x_Cv_{y_1} - y_Cv_{x_1}) + v_{z_1}(x_C\omega_{y_1} - y_C\omega_{x_1})] + J_{zx}\dot{\omega}_{y_1} - J_{yz}\dot{\omega}_{x_1} + \omega_{z_1}(J_{yz}\omega_{y_1} + J_{zx}\omega_{x_1})\}\sin\varphi - J_{zz}\dot{\omega}_{z_1}\end{aligned} \tag{24b}$$

式(24)即刚体相对于一般动参考系的定轴转动微分方程。该方程与理论力学教科书中所给出的刚体相对于定参考系的定轴转动微分方程[1-3]相比，多出了附加项 Δ。尽管 Δ 的表达式(24b)看起来比较繁杂，但该表达式是以显函数 $\Delta(v_{x_1}, v_{y_1}, v_{z_1}, \omega_{x_1}, \omega_{y_1}, \omega_{z_1}, \dot{v}_{x_1}, \dot{v}_{y_1}, \dot{v}_{z_1}, \dot{\omega}_{x_1}, \dot{\omega}_{y_1}, \dot{\omega}_{z_1}, \varphi)$ 的形式给出的；因此在具体应用时并不复杂。另外，从式(24b)可以看出：附加项 Δ 源于动参考系相对于定参考系的非惯性运动；如果动参考系相对于定参考系作惯性运动，则 Δ 退变为零。

下面给出式(24)的 3 个具体应用实例，以此说明该方程的正确性和应用上的便捷性。

2 应用实例

实例 1：如图 2 所示，质量为 M、长为 l 的均质细杆 OA 通过光滑圆柱铰链 O 与铅垂轴 B 相连，已知铅垂轴 B 以匀角速度 Ω 转动，试列写出细杆 OA 相对铅垂轴 B 的运动微分方程。

显然细杆 OA 相对于铅垂轴 B 的运动可以看作是刚体相对于动参考系的定轴转动，因此，可以套用方程(24)来建立细杆 OA 相对铅垂轴 B 的运动微分方程。为此，先以 O 为原点建立与铅垂轴 B 相固连的动参考系 $Ox_1y_1z_1$，其中轴 y_1 铅直向下，轴 z_1 沿柱铰 O 的轴线向外；再以 O 为原点建立同细杆 OA 相固连的坐标系考系 $Oxyz$，其中轴 y 沿细杆的中轴线 OA，轴 z 与轴 z_1 轴重合(即轴 z 沿柱铰 O 的轴线向

外)。在上述坐标系下,显然有:$x_C = z_C = 0, y_C = l/2$, $J_{xx} = J_{zz} = Ml^2/3, J_{yy} = 0, J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0, v_{x_1} = v_{y_1} = v_{z_1} = 0, \omega_{x_1} = \omega_{z_1} = 0, \omega_{y_1} = -\Omega, \dot{v}_{x_1} = \dot{v}_{y_1} = \dot{v}_{z_1} = 0$, $\dot{\omega}_{x_1} = \dot{\omega}_{y_1} = \dot{\omega}_{z_1} = 0$。将上述这些表达式代入式(24b)得到

$$\Delta = \frac{1}{6} M l^2 \Omega^2 \sin(2\varphi) \tag{25}$$

图 2　铰接于铅垂轴的细杆

Fig. 2　A thin rod hinged on a vertical shaft

另外,根据细杆所受的外力情况,容易写出

$$\sum M_z(\boldsymbol{F}^{(e)}) = -\frac{1}{2} Mgl\sin\varphi \tag{26}$$

最后,将以上两式代入到方程(24a),得到

$$2l\ddot{\varphi} = l\Omega^2 \sin(2\varphi) - 3g\sin\varphi \tag{27}$$

式(27)即应用方程(24)所建立的细杆 OA 相对铅垂轴 B 的运动微分方程。该方程与文献[15]应用欧拉动力学方程所推导出的该细杆相对铅垂轴 B 的运动微分方程完全相同,说明本研究所建立的刚体相对于一般动参考系的定轴转动微分方程(24)是正确的。另外,从方程(24)在本例的应用过程上可以看出,该方程在应用上是非常便捷的。

实例 2:如图 3 所示,滑块 A 在固定水平面上沿 y_0 轴的运动规律为 $y_O = a\sin(kt)$,细杆 OB 通过光滑柱铰 O 链铰接于滑块 A 上,细杆 OB 的质量为 M,长为 $2l$,试列写出细杆相对滑块的运动微分方程。

由于细杆 OB 相对于滑块 A 的运动可以看作是刚体相对于动参考系的定轴转动,因此,可以套用方程(24)来建立细杆 OB 相对于滑块 A 的运动微分方程。为此,先以 O 为原点建立与滑块 A 相固连的动参考系 $Ox_1y_1z_1$,其中轴 x_1 和 y_1 分别与固定轴 x_0 和 y_0 同向;再以 O 为原点建立同细杆 OB 相固连的坐标系 $Oxyz$,其中轴 x 沿细杆的中轴线 OB,轴 z 与轴 z_1 重合(即轴 z 沿柱铰 O 的轴线向外)。在上述坐标系下,显然有:$x_C = l, y_C = z_C = 0, J_{xx} = 0, J_{yy} = J_{zz} = 4Ml^2/3, J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0, v_{x_1} = v_{z_1} = 0, v_{y_1} = \dot{y}_O = ak \times \cos(kt), \omega_{x_1} = \omega_{y_1} = \omega_{z_1} = 0, \dot{v}_{x_1} = \dot{v}_{z_1} = 0, \dot{v}_{y_1} = -ak^2 \times \sin(kt), \dot{\omega}_{x_1} = \dot{\omega}_{y_1} = \dot{\omega}_{z_1} = 0$。将上述表达式代入式(24b)得

$$\Delta = Malk^2 \sin(kt)\cos\varphi \tag{28}$$

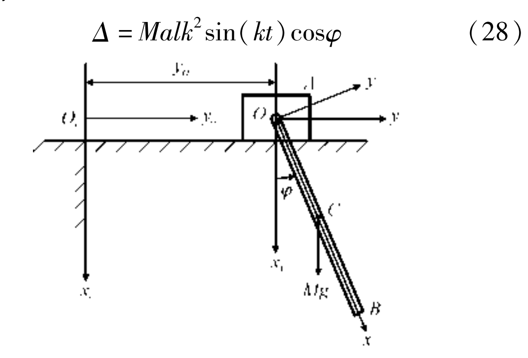


图 3　铰接于滑块上的细杆

Fig. 3　A thin rod hinged on a slide

根据细杆 OB 所受的外力情况,容易写出

$$\sum M_z(\boldsymbol{F}^{(e)}) = -Mgl\sin\varphi \tag{29}$$

将以上两式代入到方程(24a)得

$$4l\ddot{\varphi} = 3ak^2\sin(kt)\cos\varphi - 3g\sin\varphi \tag{30}$$

式(30)即应用方程(24)所建立的细杆 OB 相对于滑块 A 的运动微分方程,容易证明此方程与应用刚体的平面运动微分方程[1]所建立的细杆 OB 相对于滑块 A 的运动微分方程完全相同(证明从略)。这再一次说明本研究所建立的刚体相对于一般动参考系的定轴转动微分方程(24)是正确的。另外,从本例的简单推导过程可以看出,应用方程(24)可以非常方便地导出细杆 OB 相对于滑块 A 的运动微分方程。

实例 3:如图 4 所示,一架直升机相对大地参考系 $O_0x_0y_0z_0$ 作空间一般运动,其中坐标系 $Ox_1y_1z_1$ 为与直升机机身相固连的坐标系(直升机主体坐标系);坐标系 $Oxyz$ 为与直升机螺旋桨-轮毂系统(看作为刚体)相固连的坐标系(螺旋桨-轮毂坐标系),轴 z_1 和轴 z 相重合,并均沿着螺旋桨-轮毂的转轴线指向直升机顶部,轴 y_1 通过直升机的鼻尖指向前方,轴 y 平行一桨叶。设直升机机身相对大地参考系 $O_0x_0y_0z_0$ 的运动方程(运动规律)为

$$\begin{cases} x_O = a_1 t, y_O = a_2 t, z_O = a_3 \\ \psi = a_4 t + a_5 t^2, \theta = a_6 t, \phi = a_7 t \end{cases} \tag{31}$$

式中:x_O、y_O、z_O 为直升机主体坐标系 $Ox_1y_1z_1$ 的坐标原点 O 在大地参考系 $O_0x_0y_0z_0$ 中的直角坐标;ψ、θ、ϕ 为直升机主体坐标系 $Ox_1y_1z_1$ 相对大地参考系 $O_0x_0y_0z_0$ 的 3-2-1 欧拉角[16]。螺旋桨-轮毂(刚体)的参数如下。

$$\begin{cases} M = b_1, x_C = y_C = 0, z_C = h, \\ J_{xx} = J_{yy} = b_2, J_{zz} = b_3, \\ J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0 \end{cases} \tag{32}$$

用 φ 表示螺旋桨-轮毂相对直升机机身的转角(图 4 所示)。试列写出螺旋桨-轮毂相对直升机机身的运动微分方程。

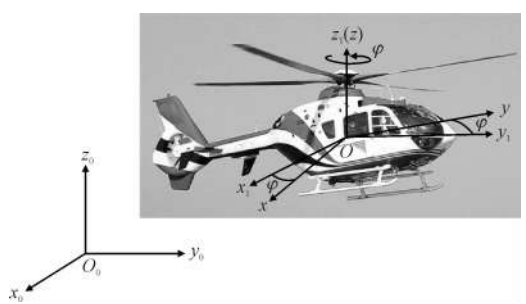


图 4　作空间一般运动的直升机

Fig. 4　A helicopter undergoing a general motion

应用 3-2-1 欧拉角[16],可以将直升机主体坐标系 $Ox_1y_1z_1$ 的角速度 $\boldsymbol{\omega}_1$ 和原点 O 的速度 $\boldsymbol{v}_O$ 分别表达为如下阵列形式。

$$\begin{bmatrix} \omega_{x_1} \\ \omega_{y_1} \\ \omega_{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta & 0 & 1 \\ \sin\phi\cos\theta & \cos\phi & 0 \\ \cos\phi\cos\theta & -\sin\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \tag{33}$$

$$\begin{bmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \\ v_{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & \sin\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi & \sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{x}_O \\ \dot{y}_O \\ \dot{z}_O \end{bmatrix} \tag{34}$$

将式(31)代入式(33)和式(34)后,再将所得两式及式(32)一同代入式(24b),得到

$$\Delta = b_3\{[a_6a_7 - 2a_5\cos(a_6t)]\cos(a_7t) + (a_4 + 2a_5t)[a_7\cos(a_6t)\sin(a_7t) + a_6\sin(a_6t)\cos(a_7t)]\} \tag{35}$$

最后将上式代入方程(24a),得到

$$J_{zz}\ddot{\varphi} = \sum M_z(\boldsymbol{F}^{(e)}) + b_3\{[a_6a_7 - 2a_5\cos(a_6t)] \times \cos(a_7t) + (a_4 + 2a_5t)[a_7\cos(a_6t)\sin(a_7t) + a_6\sin(a_6t)\cos(a_7t)]\} \tag{36}$$

式(36)即螺旋桨-轮毂相对直升机机身的运动微分方程,其中 $\sum M_z(\boldsymbol{F}^{(e)})$ 表示作用在螺旋桨-轮毂上的所有驱动力、轴承摩擦力和气动阻力对螺旋桨-轮毂的转轴之矩的代数和。从本例可以看出,应用方程(24)可以很方便地列写出螺旋桨-轮毂相对直升机机身的运动微分方程。

3　结束语

本研究建立了刚体相对一般动参考系的定轴转动微分方程。应用该方程可以方便、具体地列写出各种相对于动参考系作定轴转动刚体的运动微分方程,从而为进一步研究和分析那些相对于动参考系作定轴转动刚体的动力学特性创造了便利条件。

参考文献

[1]　和兴锁. 理论力学(I)[M]. 北京:科学出版社,2005.

[2]　苏振超,薛艳霞,刘丽丽. 理论力学[M]. 北京:清华大学出版社,2019.

[3]　陈建平,范钦珊. 理论力学[M]. 3 版. 北京:高等教育出版社,2018.

[4]　符双学,李家宇. 工程力学[M]. 武汉:华中科技大学出版社,2017.

[5]　GROSS D, HAUGER W, SCHRODER J, et al. Engineering mechanics 3[M]. 2nd ed. Heidelberg:Springer-Verlag,2014.

[6]　HIBBELER R C. Engineering mechanics:Dynamics[M]. 14th ed. Hoboken:Pearson Prentice Hall,2016.

[7]　MERIAM J L, KRAIGE L G, BOLTON J N. Engineering mechanics:Dynamics[M]. 8th ed. Hoboken:John Wiley & Sons,2016.

[8]　PYTEL A, KIUSALAAS J. Engineering mechanics:Dynamics[M]. 4th ed. Stamford:Cengage Learning,2016.

[9]　GHOSH A. Introduction to dynamics[M]. Singapore:Springer,2018.

[10]　BILLINGSLEY J. Essentials of dynamics and vibrations[M]. Cham:Springer,2018.

[11]　CHERNOUSKO F L, SHMATKOV A M. Optimal control of rotation of a rigid body by a movable internal mass[J]. Journal of computer and systems sciences international,2019,58:335-348.

[12]　AKULENKO L D, BOLOTNIK N N, BORISOV A E, et al. Quasi-optimal control of rotation of a rigid body about a fixed axis taking friction into account[J]. Journal of computer and systems sciences international,2015,54:331-348.

[13]　HOLZINGER S, SCHÖBERL J, GERSTMAYR J. The equations of motion for a rigid body using non-redundant unified local velocity coordinates[J]. Multibody system dynamics,2020,48:283-309.

[14]　ELMANDOUH A A. On the stability of the permanent rotations of a charged rigid body-gyrostat[J]. Acta mechanica, 2017, 228:3947-3959.

[15]　张劲夫,秦卫阳,谷旭东. 新编高等动力学[M]. 西安:西北工业大学出版社,2020.

[16]　RAPTIS I A, VALAVANIS K P. Linear and nonlinear control of small-scale unmanned helicopters[M]. New York:Springer,2011.

(编辑　黄崇亚)